ISSN 1512-1232

მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზების შემოწმება

ფრანგიშვილი ივერი არჩილის ძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი,
iva.prangishvili@gmail.com

ანოტაცია: *მოცემულია მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზების შემოწმების წესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს სასურველ დონეზე შემოვზღუდოთ ასიმეტრიული ჰიპოთეზების შემოწმების ერთ-ერთი ძირითადი კრიტერიუმი შერეული მიმართულების არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე. დამტკიცებულია აღნიშნული ფაქტის დამადასტურებელი თეორემები.*

საკვანძო სიტყვები*: ასიმეტრიული ჰიპოთეზა, პირობითი ბაიესის მეთოდი, შერეული მიმართულების არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე, მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზები, მთლიანი შერეული მიმართული არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე.*

1. შესავალი

ბევრ გამოყენებებში, მაგალითად, გენეტიკაში, მედიცინაში, კომპიუტერულ მეცნიერებებში, კომპიუტერულ ინჟინერიაში, კავშირგაბმულობაში და სხვა, განხილულია მრავალი ასიმეტრიული ჰიპოთეზის შემთხვევა, ანუ შემთხვევა, როდესაც შესამოწმებელი ჰიპოთეზები არიან შემდეგნაირი [1-7]

$$H_i^{(0)}:\theta_i=0 \quad vs \quad H_i^{(-)}:\theta_i<0 \text{ ან } H_i^{(+)}:\theta_i>0,\ i=1,...,m. \qquad (1.1)$$

სადაც m არის $\theta_1,...,\theta_m$ პარამეტრებთან დაკავშირებით ინდივიდუალური ჰიპოთეზების რაოდენობა, რომლებიც უნდა შემოწმდეს $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_m)$ ტესტ სტატისტიკით, სადაც $X_i \approx f(x_i\,|\,\theta_i)$.

მრავალ შემთხვევაში, განსაკუთრებულად ბიო–სამედიცინო გამოკვლევებისას, ჰიპოთეზების რაოდენობა არის ძალზე დიდი [5]. დიდი რაოდენობის მრავლობითი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად, დასახული მიზნისაგან დამოკიდებულებით, მრავალი სხვადასხვა კრიტერიუმი გამოიყენება. მაგალითად, შედარების ტიპის შეცდომის დონე (შტშდ, $CWER$), ოჯახური ტიპის შეცდომის დონე (ოტშდ, $FWER$) და არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე (FAR) ან დადებითი არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე ($pFDR$), შერეული მიმართულების არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე ($mdFDR$) [8, 9]. როდესაც ალტერნატივები არიან ასიმეტრიულები $mdFDR$ არის გამოყენებული [5].

პირობით ბაიესის მეთოდზე (CBM) დაფუძნებული მიმდევრობითი მეთოდი მრავლობითი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად განხილული იყო ნაშრომში [10], სადაც ნაჩვენები იყო, რომ ორივეს, ოჯახური ტიპის შეცდომის დონის და ოჯახური ტიპის სიმძლავრის საკონტროლებლად ის იყენებს ამონარჩევს მნიშვნელოვნად მცირე დაკვირვების შედეგებით ვიდრე ბონფერონის ან ურთიერთ გადაკვეთის სქემა, რომელიც იყენებს მაღლა აღმავალ და დაბლა დაღმავალ მეთოდებს მრავლობითი შედარებისას მიმდევრობით დამუშავებებში [11, 12]. ახალი მეთოდი აღემატება ადრე შემოთავაზებულ ტესტირების მეთოდებს ამონარჩევის მოსალოდნელი ზომის არსებითი შემცირებით. რადგან პირობითი ბაიესის მეთოდი შეიძლება გამოყენებული

ISSN 1512-1232

იქნას სიმეტრიული და ასიმეტრიული ჰიპოთეზებისათვის რაიმე ცვლილების გარეშე და იმის მხედველობაში მიღებით, რომ მას შეუძლია გაითვალისწინოს ასიმეტრიულობა მარტივად როგორც აპრიორულ განაწილებებში, ასევე შეზღუდვების დონეებში, ვფიქრობთ, რომ CBM–ის მიდგომის გამოკვლევა ასიმეტრიული მრავლობითი ჰიპოთეზებისათვის საინტერესო და პერსპექტიულია. აღნიშნულზე დაყრდნობით, CBM–ის გამოყენება ორივე, ინდივიდუალური და მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზებისათვის არის განხილული ქვემოთ *FAR*–თან კონტექსტში.

2. ჭეშმარიტი ჰიპოთეზების უკუგდების აპოსტერიული ალბათობების შეზღუდვები (ამოცანა 7)

ამოცანის ფორმულირებისათვის განვიხილოთ შემდეგი ინდივიდუალური ასიმეტრიული ჰიპოთეზები

$$H^{(0)}:\theta=0 \quad vs \quad H^{(-)}:\theta<0 \text{ ან } H^{(+)}:\theta>0 .$$

ამ ჰიპოთეზების შემოწმებისათვის განვიხილოთ ფორმულირება, როდესაც II ტიპის შეცდომების დონეები არიან მინიმიზებული (რაც ნიშნავს, რომ სიმძლავრე არის მაქსიმიზებული) და I ტიპის შეცდომების დონეები არიან შემოზღუდულები, ანუ განვიხილოთ შემდეგი პრობლემა [4, 13]:

$$G_\delta=\max_{\{\Gamma_-,\Gamma_0,\Gamma_+\}}\left\{K_0\cdot\left[p(H_-)\cdot P(x\in\Gamma_-\mid H_-)+p(H_0)\cdot P(x\in\Gamma_0\mid H_0)+p(H_+)\cdot P(x\in\Gamma_+\mid H_+)\right]\right\} \tag{2.1}$$

შეზღუდვებისას

$$\begin{aligned}
&K_1\cdot\left[p(H_0)\cdot P(x\in\Gamma_-\mid H_0)+p(H_+)\cdot P(x\in\Gamma_-\mid H_+)\right]\le r_7^-,\\
&K_1\cdot\left[p(H_-)\cdot P(x\in\Gamma_0\mid H_-)+p(H_+)\cdot P(x\in\Gamma_0\mid H_+)\right]\le r_7^0,\\
&K_1\cdot\left[p(H_-)\cdot P(x\in\Gamma_+\mid H_-)+p(H_0)\cdot P(x\in\Gamma_+\mid H_0)\right]\le r_7^+ .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

აქ ასიმეტრიული ჰიპოთეზებისა შემოწმებისათვის შემდეგი სახის დანაკარგების ფუნქციები

$$L_1(H_i,\delta_j(x)=1)=\begin{cases}0 & at\ \ i=j,\\ K_1 & at\ \ i\ne j;\end{cases} \text{ და } L_2(H_i,\delta_j(x)=0)=\begin{cases}K_0 & at\ \ i=j,\\ 0 & at\ \ i\ne j;\end{cases} \tag{2.3}$$

არიან გამოყენებული, სადაც K_1 არის H_j –ის არასწორედ მიღებით გამოწვეული დანაკარგი, როდესაც H_i არის ჭეშმარიტი და K_0 არის არის H_j –ის არასწორედ უკუგდებით გამოწვეული დანაკარგი, მისი შემოწმებისას H_i–თან მიმართებაში.

ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლების მეთოდის და აპოსტერიორული ალბათობების ცნების გამოყენება (2.1), (2.2) პრობლემის გადასაწყვეტად, გვაძლევს

$$\begin{aligned}
\Gamma_-&=\left\{x:K_1\cdot\left(p(H_0\mid x)+p(H_+\mid x)\right)<\frac{1}{\lambda_7^-}\cdot K_0\cdot p(H_-\mid x)\right\},\\
\Gamma_0&=\left\{x:K_1\cdot\left(p(H_-\mid x)+p(H_+\mid x)\right)<\frac{1}{\lambda_7^0}\cdot K_0\cdot p(H_0\mid x)\right\},\\
\Gamma_+&=\left\{x:K_1\cdot\left(p(H_-\mid x)+p(H_0\mid x)\right)<\frac{1}{\lambda_7^+}\cdot K_0\cdot p(H_+\mid x)\right\},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ISSN 1512-1232

სადაც ლაგრანჟის მამრავლები λ_7^- , λ_7^0 და λ_7^+ არიან განსაზღვრული ისე, რომ (2.2) პირობებში ტოლობებს აქვს ადგილი.

შემოვიტანოთ ზემოთ ნახსენები შერეული მიმართულების არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონის (*mdFDR*) განსაზღვრება [14]

$$mdFDR = P(x \in \Gamma_- \mid H_+) + P(x \in \Gamma_- \mid H_0) + P(x \in \Gamma_+ \mid H_-) + P(x \in \Gamma_+ \mid H_0) . \quad (2.5)$$

ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებულებას.

თეორემა 2.1. *CBM 7 შეზღუდვის დონეებით (2.2), პირობის* $\frac{r_7^- + r_7^+}{K_1 \cdot P_{\min}} = q$ *(ანუ* $r_7^- + r_7^+ = q \cdot K_1 \cdot P_{\min}$ *) დაკმაყოფილებისას, სადაც* $0 < q < 1$ *,* $P_{\min} = \min\{p(H_-), p(H_0), p(H_+)\}$ *, უზრუნველყოფს გადაწყვეტილების წესს* q *–ზე ნაკლები ან ტოლი mdFDR–ით, ანუ პირობით* $mdFDR \le q$ *.*

დამტკიცება. მხედველობაში მივიღოთ აღნიშვნა $P_{\min} = \min\{p(H_-), p(H_0), p(H_+)\}$ (2.2) შეზღუდვებში და განვიხილოთ *mdFDR*–ის განსაზღვრა (2.5). გვექნება

$$mdFDR \le \frac{r_7^- + r_7^+}{K_1 \cdot P_{\min}} = q$$

რაც საჭირო იყო დაგვემტკიცებინა.

ვუწოდოთ არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე (*FAR*)) შემდეგს

$$FAR = P(x \in \Gamma_0 \mid H_-) + P(x \in \Gamma_0 \mid H_+) .$$

მაშინ ცხადია, რომ როდესაც λ_7^0 არის შერჩეული ისე, რომ (2.2)–ის მეორე პირობაში ტოლობას აქვს ადგილი, სრულდება შემდეგი პირობა

$$FAR \le \frac{1}{P'_{\min}} \cdot \frac{r_7^0}{K_1}$$

სადაც $P'_{\min} = \min\{P(H_-), P(H_+)\}$.

ცნობილია [15], რომ მოცემული შეზღუდვის q დონისათვის, ყოველთვის არ არის შესაძლებელი მივიღოთ გადაწყვეტილება x დაკვირვების შედეგის საფუძველზე. ასეთ შემთხვევაში, გადაწყვეტილების მისაღებად, საჭიროა q –ს შეცვლა, რაც შედეგად იწვევს *mdFDR*–ის შეცვლას ან გავაგრძელოთ დაკვირვებები გადაწყვეტილების მიღებამდე, ანუ გადავიდეთ მიმდევრობით ექსპერიმენტზე.

გადაწყვეტილების მიღების წესები საჭირო შეზღუდვის დონეებით ზემოთ განხილულ ამოცანაში, რომელიც უზრუნველყოფს პირობის $mdFDR \le q$ შესრულებას, შეიძლება აღვწეროთ *პროცედურა A*–თი, თავისი ბუნებით მიმდევრობითში. ავღნიშნოთ x_i ($i = 1,2,...$) არის i –რი დაკვირვების შედეგი. მაშინ მიმდევრობითი ტესტი არის შემდეგი [4]:

პროცედურა A

ბიჯი 1. თუ ტესტ სტატისტიკა $x_1 \in \Gamma_i$ და $x_1 \notin \Gamma_j$, სადაც $j \in \Psi / i$, მივიღოთ ჰიპოთეზა H_i , $i \in \Psi$, სადაც $\Psi \equiv \{-,0,+\}$ არის ინდექსების სიმრავლე;

თუ $x_1 \notin \Gamma_i$, $i \in \Psi$, ან $(x_1 \in \Gamma_i)\bigcap(x_1 \in \Gamma_j)$, $i \ne j$, $i, j \in \Psi$, ან $(x_1 \in \Gamma_-)\bigcap(x_1 \in \Gamma_0)\bigcap(x_1 \in \Gamma_+)$ მაშინ გავაგრძელოთ დაკვირვებები;

მოვნახოთ x_2 და გამოვთვალოთ $\bar{x}_2 = (x_1 + x_2)/2$;

ISSN 1512-1232

ბიჯი 2. თუ ტესტ სტატისტიკა $\bar{x}_2 \in \Gamma_i$ და $\bar{x}_2 \notin \Gamma_j$, სადაც $j \in \Psi / i$, მივიღოთ ჰიპოთეზა H_i, $i \in \Psi$, სადაც $\Psi \equiv \{-,0,+\}$ არის ინდექსების სიმრავლე;

თუ $\bar{x}_2 \notin \Gamma_i$, $i \in \Psi$, ან $(\bar{x}_2 \in \Gamma_i) \bigcap (\bar{x}_2 \in \Gamma_j)$, $i \neq j$, $i, j \in \Psi$, ან $(\bar{x}_2 \in \Gamma_-) \bigcap (\bar{x}_2 \in \Gamma_0) \bigcap (\bar{x}_2 \in \Gamma_+)$ მაშინ გავაგრძელოთ დაკვირვებები;

მოვნახოთ x_3 და გამოვთვალოთ $\bar{x}_2 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$;

და ა.შ.

დაკვირვებები გავაგრძელოთ სანამ დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკული არ იქნება მიკუთვნებული შესამოწმებელი ჰიპოთეზების მიღების მხოლოდ ერთ არეს.

განსაზღვრება 2.1. პროცედურა არის „შესაფერისი“, თუ მისი გამოყენების შედეგად, დასახული მიზნის მიღწევის ალბათობა არის 1–ის ტოლი.

თეორემა 2.2 [4]. ჰიპოთეზების მოცემული სიმრავლისათვის H_0, H_- *და* H_+, ყოველთვის არსებობს ამონარჩევის ისეთი ზომა n, რომლის საფუძველზეც შესამოწმებელი ჰიპოთეზებთან დაკავშირებით გადაწყვეტილების მიღება იქნება შესაძლებელი მოცემული საიმედობით, როდესაც ლაგრანჟის მამრავლები არიან განსაზღვრული $n=1$–თვის გადაწყვეტილების მიღების არეებში და პირობა $mdFDR \le q$ იქნება დაკმაყოფილებული.

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ მიმდევრობითი პროცედურა A არის შესაფერისი და გადაწყვეტილების მიღებისას პირობა $mdFDR \le q$ სრულდება.

3. მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზების შემთხვევა

განვიხილოთ მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზები (1.1). ვთქვათ $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)$ არის ტესტ სტატისტიკის კრებული ისეთი, რომ $X_i \sim f(x_i \mid \theta_i)$. ვთქვათ $d = (d_1, d_2, ..., d_m)$ არის გადაწყვეტილების წესი კომპონენტებით $d_i \in (-1,0,+1)$, სადაც $d_i = -1$ ნიშნავს, რომ $H_i^{(-)}$ არის ჭეშმარიტი, $d_i = 0$ ნიშნავს, რომ $H_i^{(0)}$ არის ჭეშმარიტი, და $d_i = +1$ ნიშნავს, რომ $H_i^{(+)}$ არის ჭეშმარიტი. განვიხილავთ შემდეგი სახის დანაკარგების ფუნქციას

$$L(\theta, d) = \sum_{i=1}^{m} L_i(\theta_i, d_i), \qquad (2.6)$$

სადაც $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$. $L(\theta_i, d_i)$ არის დანაკარგები ყოველი $H_i^{(0)}$ ინდივიდუალური ჰიპოთეზის შესამოწმებლად $H_i^{(-)}$ და $H_i^{(+)}$ წინააღმდეგ.

პირობითი ბაიესის წესი მრავლობითი ჰიპოთეზების (1.1)–ის შესამოწმებლად შეიძლება მიღებული იქნას საშუალო სიმძლავრის მაქსიმიზაციით (იხ. ზემოთ ფორმულირებული ამოცანა 7) [15]

$$r(\delta) = \sum_{i=1}^{m} r_i(d_i), \qquad (2.7)$$

შემდეგი შეზღუდვებისას

ISSN 1512-1232

$$g_j(d_i) \le r_{l,i}^j, \; i = 1,...,m, \; j = 1,...,k_l, \; l \in (1,2,3,4,5,6,7), \qquad (2.8)$$

სადაც $g_j(d_i)$, $j = 1,...,k_l$, არიან შეზღუდვების ფუნქციები CBM–ის ფორმულირებულ ამოცანებში ასიმეტრიული ჰიპოთეზების i –რი ინდივიდუალური სიმრავლისათვის, $r_{l,i}^j$ არიან შეზღუდვების დონეები, l არის CBM–ის ამოცანის ნომერი ($l = 7$ განსახილველ შემთხვევაში), k_l არის CBM–ის ამოცანა l –ის შეზღუდვებში განტოლებების რაოდენობა ($k_l = 3$).

ამ შემთხვევაში მთლიანი შერეული მიმართული არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე (*ჯშმაად* (*tmdFDR*)) (1.1) მრავლობითი ჰიპოთეზების შემოწმებისას არის შემდეგი [3, 5]

$$tmdFDR = \sum_{i=1}^{m} mdFDR_i \, , \qquad (2.9)$$

სადაც $mdFDR_i$ არის i –რი ინდივიდუალური ჰიპოთეზის შერეული მიმართული არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე.

ამრიგად, (1.1) მრავლობითი ჰიპოთეზების შემოწმებისას, ფორმულირებულ CBM–ში ყოველი d_i , ანუ ფორმულირებულ CBM–ში გადაწყვეტილებები ყოველ ასიმეტრიულ ჰიპოთეზასთან მიმართებაში, უნდა იყოს განსაზღვრული ზემოთ მოყვანილი *პროცედურა A* –ს გამოყენებით.

თეორემა 3.1. *ვთქვათ (1.1) მრავლობითი ჰიპოთეზების ასიმეტრიული ჰიპოთეზების ყოველი ქვე–სიმრავლისათვის CBM–ის ერთ–ერთი შესაძლო ფორმულირება არის გამოყენებული შეზღუდვების დონეებით, რომლებიც უზრუნველყოფენ პირობის* $mdFDR_i \le q_i$, $i = 1,...,m$, *შესრულებას. მაშინ, თუ* q_i , $i = 1,...,m$, *არიან შერჩეული ისე, რომ* $\sum_{i=1}^{m} q_i = q$, *შემდეგი პირობა* $tmdFDR \le q$ *სრულდება.*

დამტკიცება. *tmdFDR*–ის (2.9)–ით განსაზღვრის თანახმად, ყოველ ინდივიდუალ ასიმეტრიულ ამოცანაში თუ შეზღუდვების დონეებს q_i , $i = 1,...,m$, ავიღებთ ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს პირობას $\sum_{i=1}^{m} q_i = q$, თეორემის კორექტულობა ცხადია.

CBM–ის თავისებურების მხედველობაში მიღებით, ტესტ სტატისტიკის $\mathbf{X} = (X_1, X_2,..., X_m)$ გამოყენებით (1.1) მრავლობითი ჰიპოთეზების ტესტირების შემდეგ, შეიძლება ზოგიერთი i –თვის, $i \in (1,...,m)$, გადაწყვეტილება ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზების ჭეშმარიტების შესახებ არ იყოს მიღებული. იმისათვის, რომ გვქონდეს გადაწყვეტილების წესი *tmdFDR*–ით q დონეზე და ცალსახა გადაწყვეტილება ასიმეტრიული ჰიპოთეზების ყოველი ქვე–სიმრავლისათვის, საჭიროა მოპოვებული იქნას დამატებითი ინფორმაცია θ_i ($i \in (1,...,m)$) პარამეტრების შესახებ, რომელთა მიმართებაშიც მიიღება გადაწყვეტილებები, ანუ მოპოვებული უნდა იქნას დამატებითი დაკვირვებები შესაბამისი პარამეტრების შესახებ, სანამ ყველა პარამეტრთან დაკავშირებით არ იქნება მიღებული გადაწყვეტილება.

ISSN 1512-1232

დასკვნა

სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების პირობითი ბაიესის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს სასურველ დონეზე შემოვზღუდოთ არა მარტო შერეული მიმართულების არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე ინდივიდუალური ასიმეტრიული ჰიპოთეზებისათვის, არამედ მთლიანი შერეული მიმართული არაჭეშმარიტი აღმოჩენის დონე მრავლობითი ასიმეტრიული ჰიპოთეზებისათვის. ამ ფაქტის ჭეშმარიტების დასაბუთება წარმოდგენილია შესაბამისი ჰიპოთეზების დამტკიცების სახით.

ლიტერატურა

1. Finner, H. (1999). Stepwise multiple test procedures and control of directional errors. *The Annals of Statistics*, **27**(1), 274-289.
2. Shaffer, J. P. (2002). Multiplicity, directional (Type III) errors, and the null hypothesis. *Psychological Methods*, **7**(3), 356-369.
3. Bansal, N. K. & Miescke, K. J. (2013). A Bayesian decision theoretic approach to directional multiple hypotheses problems, J. of Multivariate Analysis, 120, 205–215.
4. Kachiashvili K.J., Kachiashvili J.K. and Prangishvili I.A. (2020) CBM for Testing Multiple Hypotheses with Directional Alternatives in Sequential Experiments. Sequential Analysis, 39:1, 115-131, DOI: 10.1080/07474946.2020.1727166 (https://doi.org/10.1080/07474946.2020.1727166)
5. Bansal N. K., Hamedani, G. G. and Maadooliat, M. (2016) Testing Multiple Hypotheses with Skewed Alternatives, Biometrics, 72(2), 494-502.
6. Benjamini, Y. and Hochberg, Y. (1995) Controlling the False Discovery Rate: a Practical and Powerful Approach to Multiple Testing. J. R. Statist. Sco. B. 57(1), 289-300.
7. Tartakovsky A., Nikiforov I. and Basseville M. (2015) Sequential Analysis. Hypothesis Testing and Changepoint Detection. CRC Press: Taylor & Francis Group, New York.
8. Benjamini, Y. and Yekutieli, D. (2005) False Discovery Rate–Adjusted Multiple Confidence Intervals for Selected Parameters, *Journal of the American Statistical Association*, 100:469, 71-81.
9. Chow, Sh. (2011). Controversial Statistical Issues in Clinical Trials. CRC Press: Taylor & Francis Group, New York.
10. Kachiashvili K. J. (2014) The Methods of Sequential Analysis of Bayesian Type for the Multiple Testing Problem. *Sequential Analysis*, 33(1), 23-38 DOI: 10.1080/07474946.2013.843318
11. De Sh. K., Baron M. (2012a) Step-up and step-down methods for testing multiple hypotheses in sequential experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142, 2059–2070.
12. De Sh. K., Baron M. (2012b) Sequential Bonferroni Methods for Multiple Hypothesis Testing with Strong Control of Family-Wise Error Rates I and II. *Sequential Analysis*, 31: 238–262.
13. Kachiashvili K.J., Prangishvili I.A. and Kachiashvili J.K. (2020) Quasi-optimal rule of testing directional hypotheses. International conference “Strategic Management, Decision Theory & Data Science”, Kolkata, 4-6 January, 2020. 45-46.

ISSN 1512-1232

14. Benjamini, Y., Hochberg, Y., and Kling, Y. (1993) False Discovery Rate Control in Pairwise Comparisons, Working Paper 93-2, Tel Aviv University, Dept. of Statistics and Operations Research.
15. Kachiashvili K.J. (2018) *Constrained Bayesian Methods of Hypotheses Testing: A New Philosophy of Hypotheses Testing in Parallel and Sequential Experiments*. Nova Science Publishers, Inc., New York, 361 p.

The article received: 2021-04-27