ISSN 1512-1461

UDC-534

ქაოსური ოსცილატორების სინქრონიზაცია ხმაურის გავლენით

მარიამ მარტიაშვილი[1], დავითი კობაიძე[1,2] და ოლეგ ხარშილაძე[1,2]

[1] ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, საქართველო

[2] ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მიხეილ ნოდიას სახელობის გეოფიზიკის ინსტიტუტი, თბილისი, საქართველო

აბსტრაქტი. *ორი ან მეტი დინამიური სისტემის დროში თანმხვედრი პროცესი, რომელსაც სინქრონიზაცია ეწოდება, მნიშვნელოვან როლს ასრულებს როგორც ფიზიკაში, ასევე საინჟინრო საქმესა და ციფრულ სისტემებში. კვლევის მიზანია, ფაზური და სიხშირული იძულებითი სინქრონიზაციის შესწავლა ვან დერ პოლის არაწრფივი ოსცილატორის მაგალითზე. გამოკვლეულია ამ ოსცილატორზე გარეშე ძალის ზეგავლენა რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. შესწავლილია, თუ რა გავლენას ახდენს შემთხვევითი ხმაური სინქრონიზაციის ეფექტზე. ნაჩვენებია რომ, მაიძულებელ პერიოდულ ძალასთან ერთად ხმაურის დამატება, ახდენს ვან დერ პოლის ოსცილატორის ქაოსური რხევების რეგულაციას.*

საკვანძო სიტყვები: *სინქრონიზაცია, ვან დერ პოლის ოსცილატორი, ადლერის განტოლება*

I. შესავალი

სინქრონიზაცია წარმოადგენს მნიშვნელოვან ფიზიკურ და მათემატიკურ ფენომენს, რომელიც აღწერს პერიოდულად ცვალებადი მოვლენების ან პროცესების დროში შეწყობის და თანხვედრის მექანიზმებს. აღნიშნული ფენომენი განიხილება როგორც დინამიურ სისტემებში, ისე ციფრულ ტექნოლოგიებში, კომუნიკაციასა და ნავიგაციაში [1]. რხევის სინქრონიზაცია, რომელიც არაწრფივ ოსცილატორებს ეხება, განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს თანამედროვე ფიზიკაში [2]. ამ კვლევაში წარმოდგენილია სინქრონიზაციის ფიზიკური პრინციპების ანალიზი ვან დერ პოლისა და ადლერის განტოლების მაგალითზე.

სინქრონიაზაცია მნიშვნელოვანია ციფრულ მობილურებში, სადაც ხდება მონაცემების დამუშავება, ელექტრულ წრედებში, დინამიურ სისტემებში, ნავიგაციასა და სხვა. არსებობს კიდევ მონაცემთა სინქრონიზაცია, რაც გულისხმობს ორ ან მეტ მოწყობილობას შორის მონაცემების უწყვეტი სინქრონიზაციას და მათ შორის ცვლილებების ავტომატურად განახლებას, პროცესის სისტემაში თანმიმდევრობის შესანარჩუნებლად [3-4].

რხევის სინქრონიზაცია (ფაზური სინქრონიზაცია) არის ორი ან მეტი დაწყვილებული ოსცილატორის რხევის რეჟიმის დადგენისა და შენარჩუნების პროცესი, რომელშიც ამ ოსცილატორების სიხშირეები ახლოს არის ერთმანეთთან (ან მათი თანაფარდობა ახლოს არის ორი მარტივი მთელი რიცხვის თანაფარდობასთან).

ISSN 1512-1461

კრისტიან ჰიუგენსი პირველი გახლდათ, ვინც დააკვირდა და შეისწავლა (1665წ.) ქანქარიანი სათების სინქრონიზაცია. ჰიუგენსმა შენიშნა, რომ ორი ქანქარიანი საათი, რომლებიც ერთ კედელზე იყო ჩამოკიდებული, დროთა განმავლობაში სინქრონიზდებოდნენ, ერთსა და იმავე ფაზაში მოძრაობდნენ. მოგვიანებით გაირკვა, რომ ეს სინქრონიზაცია გამოწვეულია მექანიკური გავლენით, რომელსაც საათები ერთმანეთზე ახდენენ საერთო საყრდენის (კედლის) მეშვეობით. მიუხედავად იმისა, რომ ჰიუგენსმა ეს მოვლენა აღწერა, მისი სრული ფიზიკური ახსნა მხოლოდ მოგვიანებით, მე-20 საუკუნეში დაიხვეწა და დაკავშირებულია მექანიკური კავშირების და სინქრონიზაციის პრინციპებთან.

არსებობს სინქრონიზაციის ორი სახე: სიხშირული და ფაზური. სიხშირული სინქრონიზაცია ნიშნავს, რომ რხევის სიხშირეები ახლოს არის ერთმანეთთან და მათი შეფარდება რაიმე მთელი რიცხვების თანაფარდობის ტოლია, ხოლო ფაზური სინქრონიზაციაა, როდესაც ფაზათა სხვაობა გვაძლევს მუდმივ მნიშვნელობას.

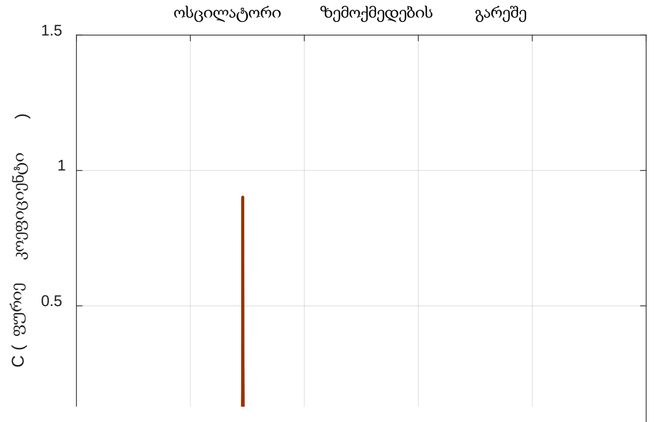
II. ვან დერ პოლის ოსცილატორი

სტატიაში ჩვენ მიერ განხილულია ფიზიკური მოდელი, რომელიც ეხება სინქონიზაციის ეფექტს ერთ-ერთი არაწრფივი ოსცილატორის, კერძოდ ვან დერ პოლის ოსცილატორის შემთხვევაში. ვან დერ პოლის ოსცილატორი წარმოადგენს არაწრფივ ავტორხევით სისტემას, რომელსაც ახასიათებს არაწრფივი მილევის რეჟიმი, თუ მასზე გარეშე ძალა არ მოქმედებს.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

ε − აგზნების პარამეტრი
ω − საკუთარი სიხშირეა,

განტოლების ამოსახსნელად გამოყენებულია სწრაფი ფურიე გარდაქმნა (რთულ სიგნალებს წარმოადგენს მარტივ სიგნალებად სხვადასხვა სიხშირეებით). გრაფიკზე ნაჩვენებია ოსცილატორი ზემოქმედების გარეშე, ამიტომ ოსცილატორი ირხევა საკუთარი სიხშირით, რაც გამოიხატება იმაში, რომ ძირითადი პიკი ჩვენ მიერ შერჩეულ სიხშირულ მონაცემებს შეესაბამება (სურ.1). ეს შემთხვევა



სურ.1. ოსცილატორი ზემოქმედების გარეშე. ε=1;ω= 1.5;

ეხებოდა ოსცილატორს ზემოქმედების გარეშე. როდესაც ოსცილატორზე მოქმედებს გარეშე ძალა განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

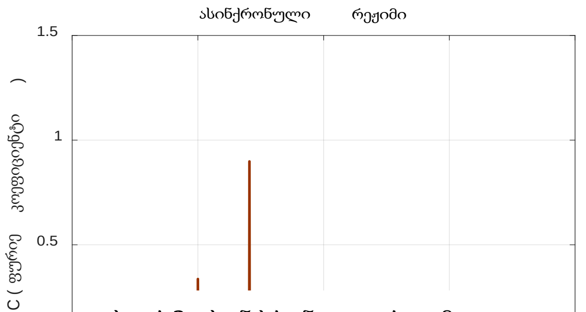
ISSN 1512-1461

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = Asin(\Omega t) \tag{2}$$

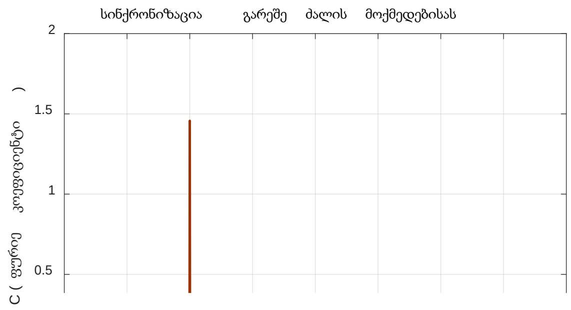
$\Omega -$ გარეშე ძალის სიხშირე;
$\omega -$ ოსცილატორის სიხშირე;
$A -$ გარეშე ძალის ამპლიტუდა;
$\varepsilon -$ აგზნების პარამეტრი;

ამ შემთხვევაში გარეშე ძალა წარმოადგენს ჰარმონიულ ზემოქმედებას, გარეშე ძალის მოქმედებისას ვღებულობთ ორი სახის შედეგს, სინქრონულსა და ასინქრონულს.

შედეგები ჩვენი ფიზიკური მოდელისთვის ასე გამოიყურება: სურ.2 - ზე ნაჩვენებია სპექტრი, როდესაც ოსცილატორზე მოქმედი გარეშე ძალის ამპლიტუდა არის საკმარისად მცირე იმისათვის, რომ ვერ შეძლოს სისტემის სინქრონიზაცია თავის სიხშირესთან. გრაფიკზე ვხედავთ ასინქრონულ რეჟიმს, ეს გამოიხატება იმაში, რომ გარეშე ძალის და ოსცილატორის ძირითადი სიხშირული პიკები მკაფიოდ გამოიკვეთა სპექტრში, ისინი ერთმანეთს არ ემთხვევიან. იმისათვის, რომ გვეჩვენებინა გარეშე ძალისა და ოსცილატორის სინქრონიზაცია, მოვიქეცით შემდეგნაირად: გარეშე ძალის ამპლიტუდა გავზარდეთ, სიხშირული პარამეტრები იგივეა, ამპლიტუდის გაზრდამ გამოიწვია მათი სინქრონიზაცია, რაც გამოიხატა სპექტრში მიღებული ერთი ძირითადი სიხშირული კომპონენტის არსებობაში



სურ.2. ასინქრონული რეჟიმი. $\varepsilon = 1;\ A = 1;\ \omega = 1.5;\ \Omega = 1;$



სურ.3. სინქრონიზაცია გარეშე ძალის მოქმედებისას.$\varepsilon = 1; A = 4; \omega = 1.5; \Omega = 1;$

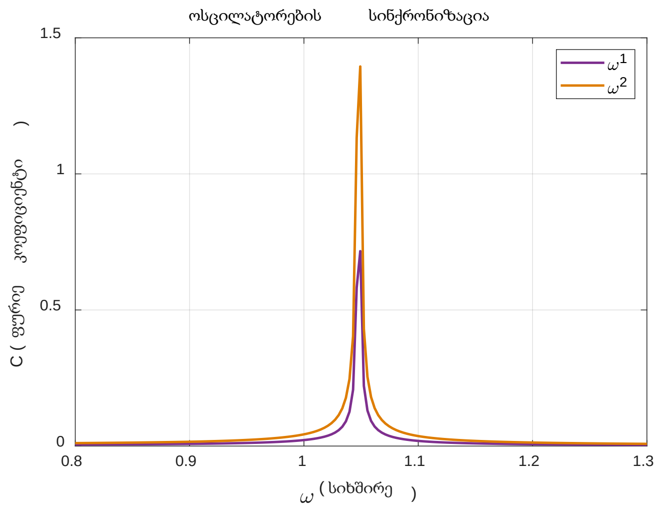
(სურ.3), რომელიც ემთხვევა გარეშე ძალის სიხშირეს. ახლა დავაკვირდეთ ვან დერ პოლის ოსცილატორს, როდესაც სისტემაზე მოქმედებს შემთხვევითი არაპროგნოზირებადი ძალა ხმაურის სახით. განტოლება შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = Asin(\Omega t) + \sqrt{2b}B(t) \tag{3}$$

ჩვენს შემთხვევაში გარეშე ძალას წარმოადგენს $\sqrt{2b}B(t)$.

ISSN 1512-1461

ჩვენ ზემოთ ვნახეთ, რომ მცირე გარეშე ძალის ამპლიტუდის შემთხვევაში სინქრონიზაციის ეფექტს საკუთარ სიხშირესა და გარეშე ძალის სიხშირეს შორის ადგილი არ ჰქონდა, თუმცა სისტემაზე თეთრი ხმაურის დამატებამ მცირე ამპლიტუდის დროსაც კი დაამყარა სინქრონიზაციის ეფექტი (სურ.4).



სურ.4. ვან დერ პოლის ოსცილატორების სინქრონიზაცია თეთრი ხმაურის მოქმედებისას. ε=0,5; b=0.2;Ω=1.5; ω=1; B=2.5;

III. ადლერის განტოლება

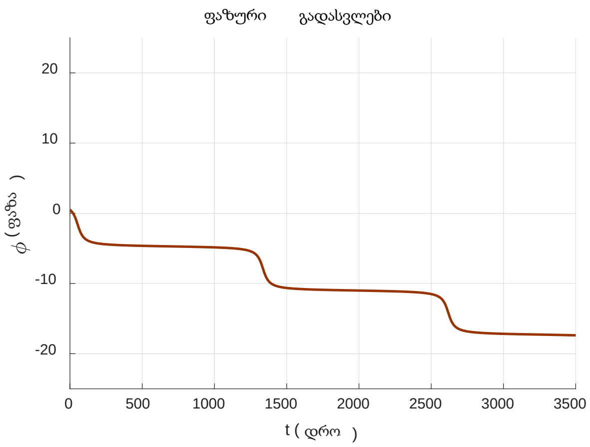
განვიხილეთ ვან დერ პოლის ოსცილატორი. ახლა კი ვნახოთ სინქრონიზაციის ეფექტი ადლერის განტოლების მაგალითზე. თუ ვან დერ პოლის განტოლებაში შემავალი პარამეტრები აკმაყოფილებენ მოცემულ პირობებს: $\omega \approx \Omega$, $\varepsilon > 0, A \ll 1$, ამონახსნს მოვძებნით შემდეგი სახით: $x(t) = R(t)cos(\omega t + \varphi(t))$, სადაც $R(t) = |a(t)|$, $\varphi(t) = Arg(a(t))$; მივიღებთ ფაზის მიმართ განტოლებას, რომელსაც ადლერის განტოლება ეწოდება:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\beta}{R_{სტ.}} sin(\varphi(t)) \tag{4}$$

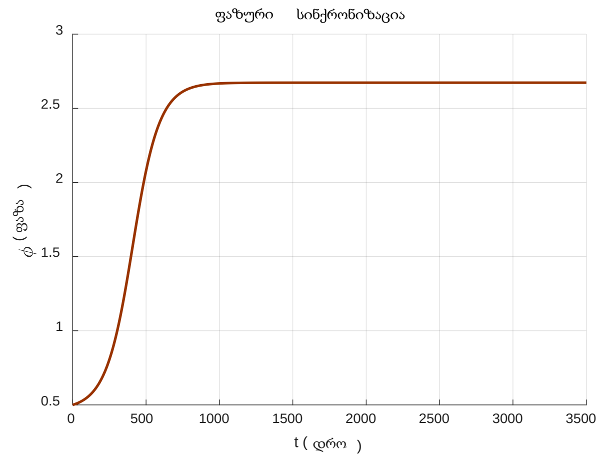
სადაც $R_{სტ.} = \sqrt{4\varepsilon}$; $\Delta = \frac{\Omega^2 - \omega}{2\Omega}$; $\beta = \frac{A}{2\Omega}$;

სინქრონიზაციას შეიძლება ჰქონდეს მუდმივი და ცვალებადი ხასიათი. ვნახოთ, როგორია ფაზური სინქრონიზაცია ერთი გარეშე ძალის შემთხვევაში. დროის გარკვეულ შუალედში ფაზას აქვს მუდმივი სახე, შემდეგ მოხდა ფაზური გადასვლა, სინქრონიზაციული რეჟიმი მივიღეთ ფაზის სხვა მნიშვნელობისთვის და ეს მეორდება (სურ.5.ა.). ჩვენ, ასევე შეგვიძლია, ვნახოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ფაზური სინქრონიზაცია მუდმივ სახეს ღებულობს. მოცემული პარამეტრებით დროის გარკვეულ შუალედში, სინქრონიზაციას ადგილი არ ჰქონდა, შემდეგ კი მიიღო მუდმივი ხასიათი (სურ.5.ბ.).

ISSN 1512-1461



სურ.5.ა. ფაზური სინქრონიზაცია ადლერის განტოლებისთვის.ფაზური გადასვლები.ε =0.1;Δ=0.032;β =0.02



სურ.5.ბ. ფაზური სინქრონიზაცია ადლერის განტოლებისთვის. ε = 0.1; Δ=0.005; β = 0.007;

ადლერის განტოლება მივიღეთ, როდესაც ვან დერ პოლის ოსცილატორზე მოქმედებდა ერთი გარეშე ძალა, ახლა ვან დერ პოლის ოსცილატორზე ვამოქმედოთ ორი გარეშე ძალა, რომელიც ისევ ჰარმონიული სახით არის მოცემული:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t + \theta) \qquad (5)$$

სადაც θ არის ფაზის წანაცვლება. ვან დერ პოლის განტოლება აკმაყოფილებს პირობებს: $A(t)$ – ნელა ცვლადი ამპლიტუდა, $\varepsilon > 0$, $\omega_0^2 \approx 1$. ამონახსნს მოვძებნით შემდეგი სახით: $x(t) = Re\left(A(t)e^{i\omega t}\right)$; შემოგვაქვს ცვლადები:

$$\tau = \frac{\varepsilon t}{2};\ \Delta = \frac{\omega^2-1}{\varepsilon\omega};\ \lambda = \frac{a}{2\omega\varepsilon^{\frac{3}{2}}};\ \mu = \frac{b}{2\omega\varepsilon^{\frac{3}{2}}};\ \delta = \frac{2(\Omega-\omega)}{\varepsilon}.$$

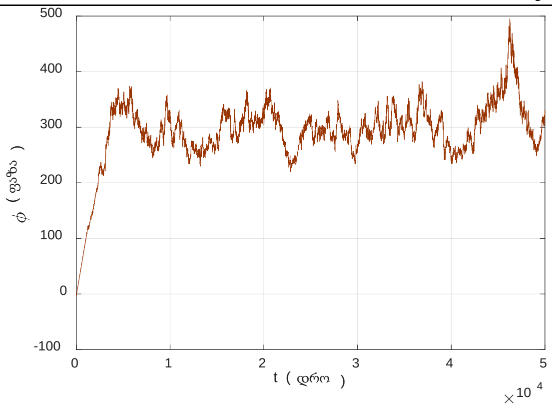
მივიღებთ ფაზის მიმართ განტოლებას - ადლერის განტოლება ორი გარეშე ძალით:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta + \lambda\sin\varphi - \mu\sin(\delta\tau + \theta - \varphi) \qquad (6)$$

გრაფიკზე ნაჩვენებია ფაზის დამოკიდებულება დროზე. ორი გარეშე ძალის არსებობის შემთხვევაში სინქრონიზაცია არ მოხდება და მიიღება ქაოსური რეჟიმი (სურ.6).

სურ.6. ფაზური სინქრონიზაცია ადლერის განტოლებისთვის ორი გარეშე ძალის მოქმედებისას. ქაოსური რეჟიმი. ε =1; Δ= 0.1; θ = 1; μ = 0.1;

ISSN 1512-1461



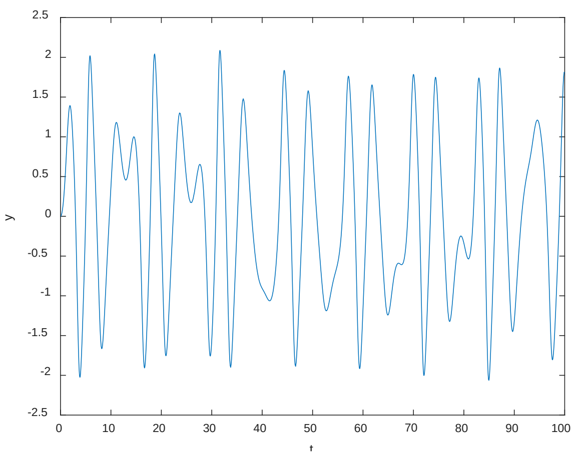
ქაოსური ოსცილატორი

განვიხილოთ ვან დერ პოლის მოდიფიცირებული განტოლება, რომელსაც დამატებული აქვს თეთრი ხმაური. მოცემული პარამეტრებისთვის ქაოსურ რეჟიმში იმყოფება (სურ.7.ა.) და (სურ.7.ბ.) წამოადგენს ქაოსური რეჟიმის ფაზურ ტრაექტორიას.

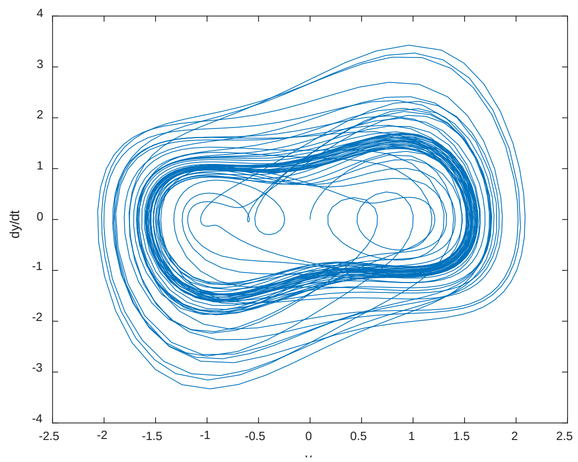
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - \gamma x^2)y - x^3 + Bcos(\nu t) \quad (7)$$

ჩვენი კვლევის მიზანი იყო, გაგვერკვია, მოახდენდა თუ არა ხმაურის დამატება გავლენას სისტემის ყოფაქცევაზე და შეძლებდა თუ არა გარკვეული პარამეტრებისთვის მისი არარეგულარული, ქაოსური რეჟიმიდან რეგულარული ან თითქმის პერიუდულ მდგომარეობაში გადაყვანას. კვლევის პროცესში სისტემაში ხმაურის დამატება განხორციელდა სხვადასხვა სიძლიერისა და სიხშირის პარამეტრების გათვალისწინებით. ამ ექსპერიმენტების შედეგად მიღებული შედეგები მოწმობს, რომ გარკვეული პირობების არსებობისას ხმაური მართლაც შეიძლება გამოიყენებულ იქნას სისტემის სტაბილიზაციისთვის. კერძოდ, აღმოჩნდა, რომ გარკვეული ხმაურის ინტენსივობა სისტემაში ახდენს ფაზურ გადასვლას და მას რეგულარული რეჟიმისკენ მიმართავს სურ.8.ა და სურ.8.ბ წამოადგენს რეგულარული რეჟიმის ფაზურ ტრაექტორიას.

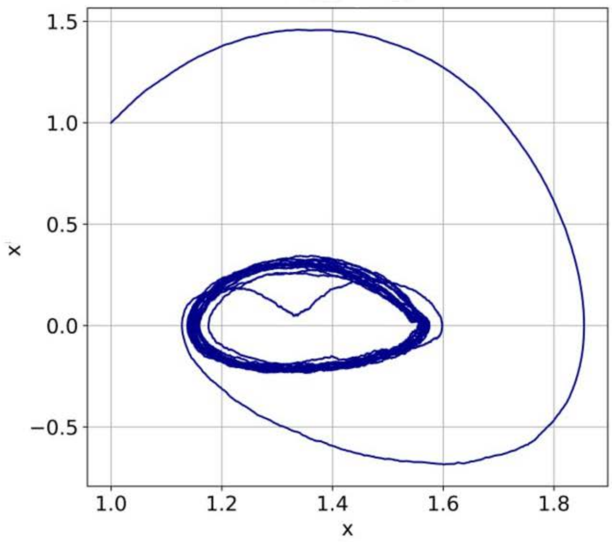


სურ.7.ა. ოსცილატორის ქაოტური რეჟიმი. $\mu = 1;\ \gamma = 1;\ \nu = 1; B = 1;$

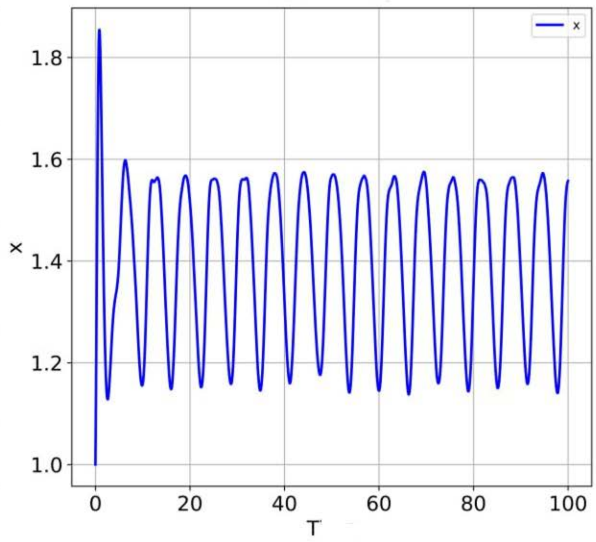


სურ.7.ბ. ფაზური ტრაექტორია ქაოსური რეჟიმისთვის. $\mu = 1;\ \gamma = 1;\ \nu = 1; B = 1;$

ISSN 1512-1461



სურ.8.ა. ფაზური ტრაექტორია მოწესრიგებული რეჟიმისთვის. $\mu = 0.7$; $\gamma = 1$; $\nu = 1$; B=1;



სურ.8.ბ. ოსცილატორის მოწესრიგებული რეჟიმი. $\mu = 0.7$; $\gamma = 1$; $\nu = 1$; B=1;

IV დასკვნა

სინქრონიზაცია ფიზიკურ პროცესებში, მნიშვნელოვანი ფენომენია, რომელიც გვაძლევს შესაძლებლობას, განვსაზღვროთ სისტემების დროში თანხვედრის პირობები. ვან დერ პოლის ოსცილატორისა და ადლერის განტოლებების მაგალითზე ნაჩვენებია, როგორ მოქმედებს სისტემა გარეშე ძალების ზემოქმედებისას. კვლევამ აჩვენა, რომ სისტემის სინქრონიზაცია დამოკიდებულია ოსცილატორის არაწრფივ პარამეტრებზე, სიხშირის შეფარდებებსა და გარეშე ძალის ამპლიტუდაზე. ნაჩვენებია რომ, მაიძულებელ პერიოდულ ძალასთნ ერთად ხმაურის გამოყენება ახდენს ვან დერ პოლის ოსცილატორის არამდგრადი რხევების სტაბილიზაციას.

ლიტერატურა

1. Boccaletti, Stefano, Alexander N. Pisarchik, Charo I. Del Genio, and Andreas Amann. „*Synchronization: from coupled systems to complex networks*“. Cambridge University Press, 2018.
2. Pikovsky, Arkady, Michael Rosenblum, Jürgen Kurths, and A. Synchronization. "A universal concept in nonlinear sciences." *Self* 2 (2001).
3. Hilborn, Robert C. “*Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*”. Oxford university press (2000).
4. Wu, Ye, et al. "Anti-phase synchronization of two coupled mechanical metronomes." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22.2 (2012).

Article received 2024-12-04